Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 7 Martie 2009

CLASA a IX-a

Problema 1. Pe laturile AB şi AC ale triunghiului ABC se consideră punctele D şi respectiv E, astfel încât $\overline{DA}+\overline{DB}+\overline{EA}+\overline{EC}=0$.

Fie T intersecţia dreptelor DC şi BE. Să se determine α real astfel încât

$$\overline{TB}+\overline{TC}=\alpha\overline{TA}.$$

Gazeta Matematică

Problema 2. Elementele mulţimii $M=\{1,2,3,\ldots,99,100\}$ se aşează într-un tablou cu 10 linii şi 10 coloane, astfel:

1	2	$\cdots$	10
11	12	$\cdots$	20
$\vdots$			
91	92	$\cdots$	100

Să se arate că oricum am şterge 10 elemente ale tabloului, printre cele 90 de numere rămase există cel puţin 10 numere în progresie aritmetică.

Problema 3. a) Fie $a,b\geq 0$ şi $x,y>0$. Să se arate că

$$\frac{a^3}{x^2}+\frac{b^3}{y^2}\geq\frac{(a+b)^3}{(x+y)^2}.$$

b) Fie $a,b,c\geq 0$ şi $x,y,z>0$ astfel încât $a+b+c=x+y+z$. Să se arate că

$$\frac{a^3}{x^2}+\frac{b^3}{y^2}+\frac{c^3}{z^2}\geq a+b+c.$$

Problema 4. Să se determine funcţiile $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ pentru care

$$\frac{f(x+y)+f(x)}{2x+f(y)}=\frac{2y+f(x)}{f(x+y)+f(y)},$$

pentru orice $x,y\in\mathbb{N}^*$.

Timp de lucru 3 ore + 1/2 oră pentru întrebări lămuritoare asupra enunţurilor
Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte